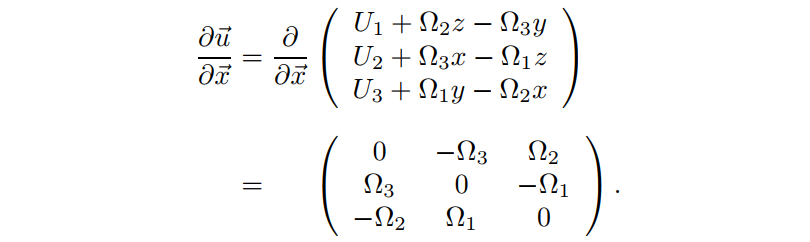
本章介绍了旨在捕获更多湍流的精细旋涡运动特征的方法.这远非对湍流的科学研究,实际上,有关该主题的科学研究倾向于集中于对湍流速度场的细节进行平均或平滑化,而我们希望尽可能廉价地获得这些细节,即使缺乏真正的准确性.

11.1 涡度(Vorticity)

我们的第一步是精确测量湍流的“涡度”特性.也就是说,在空间的任何一点,我们都想测量流体的旋转方式.在关于粘度的第10章中,我们看到了速度场的梯度如何产生一个矩阵，该矩阵的对称部分度量变形-与刚体运动无关.不足为奇的是，剩余的倾斜对称部分为我们提供了有关旋转的信息.

让我们看一下3D中的一般刚性运动速度场:

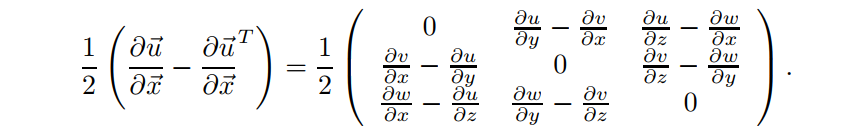
在这里,是平移,而是在原点附近测得的角速度.让我们在三个维度上计算该速度场的梯度,以了解如何提取角速度:



(的展开是向量加上，即第一个括弧的内容,作用在向量上等价于对向量的每个分量计算梯度,得到矩阵的行内容，即第二个括弧内容。)

因此，对于刚体旋转而言，梯度完全没有对称部分，也没有任何变形-倾斜对称部分使我们可以直接读取角速度的分量.

看一下速度梯度的偏斜对称部分（通常，不仅限于刚体运动）：



读取局部角速度,正如我们在刚性情况下所见,

这恰好是速度场旋度的一半.

实际上，我们将**涡度[vorticity]**定义为速度场的旋度,然后它将是局部角速度的两倍.同样,在三维上,这是一个向量:

它在两维上简化为标量：

事实证明,这是流体流最有用的“派生”量之一.

假设粘度恒定，取动量方程式(1.1)的旋度:

调整导数的阶,并假设密度为常数,以便可以将其带到压强项的散度之外,从而得出

回顾梯度的散度自动为零(有关此类的信息,请参见附录A),并假定为常数或某些势的梯度，并代入涡度,简化为

对流项可以通过一些工作（并利用无散度条件）进行简化，最终得到三个维度：

这被称为**涡度方程[vorticity equation]**,您可以看到其左侧为物质导数,右侧为粘度项,而新项为,其中我们可以写为分量形式

从几何角度来看,该术语有时称为**涡旋拉伸[vortex-stretching]**项,我们在本书中不会涉及.实际上,在二维,涡度方程进一步简化了:涡旋拉伸项自动为零.（如果您认为2D流是3D流的切片，其中和沿方向恒定且,这很容易验证.）此处为2D,现在重写物质导数以强调简单性：

实际上，如果我们谈论的粘度可以忽略不计(除了本书第10章中关于高粘度流动的内容,我们在整本书中都这样说过),二维涡度方程简化为.也就是说,涡度并没有改变，只是顺其自然.

事实证明，您可以基于涡度构建一个有吸引力的流体求解器，尤其是在二维方程式中，尽管边界条件确实存在非平凡的复杂性，并且可以从涡度重构对流的速度场（尤其是在二维中，方程更简单）。 14）。 例如，Yaeger等。 [YUM86]，Gamito等人，[Gam95]，Angelidis等人， [AN05，ANSN06]，Park和Kim [PK05]，以及Elcott等。 [ETK + 07]都走了这条路。 但是，我们现在最关心的是基于速度和压力的常规流体求解器中的涡度发生了什么。

我们已经知道在欧拉对流方案中存在数值耗散的风险:我们看到对于一阶线性插值,误差表现为额外的黏度,因此速度场的涡度同样消散也就不足为奇了.到目前为止,我们已经通过增加插值的清晰度来解决这个问题(尽管即使这样也不能完全避免耗散),或者使用FLIP切换为粒子.但是,这不是涡流消散的唯一原因.

另一个重要原因在于时间分割算法本身。 我们之前提到过，我们分别进行平移然后投影速度的算法在时间上仅是一阶精确的。 事实证明，在尝试捕获小规模旋涡时，这可能是一个相当成问题的错误。 作为一个激励性的例子，假设从恒定密度的流体绕原点开始的2D刚性旋转开始，例如

忽略边界条件和物体力,在给定初始速度场的情况下，Navier-Stoke方程的精确解是使保持恒定——旋转应以完全相同的速度继续进行.但是,如果我们使用时间分割算法对其进行步进,则会出错.即使具有完美的无误差对流,对于的时间步长(在该速度场中对应于的逆时针旋转).我们也可以得到以下中间速度场:

它不再具有涡流（易于检查），而且是发散的：我们的对流步骤将所有能量从旋转传递到膨胀。 不难验证压强解为

在用此压强更新中间速度场之后，我们最终得到

糟糕!流量停止了,不再移动.如果我们采取较小的时间步长,它会被放慢，但只有在的极限内,它才能达到应保持的涡度.(如果我们采取了较大的时间步长,则流体甚至可能已反转方向并以其他方式旋转!)

实际上,至少在密度恒定的情况下,由于梯度的旋度自动为零,因此压力投影阶段不会影响流体的涡度:当我们对速度进行对流时,损害已经发生.稍加努力，就不难验证从涡旋的刚性旋转开始,完美对流的一个时间步将其变为涡旋.如果足够小，则大约为

因此，我们的下一步是研究一种增加缺失涡流的方法.

11.2 涡度限制

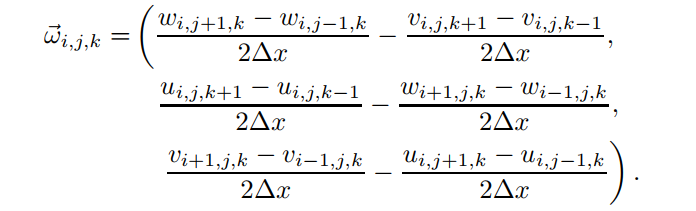
Steinhoff和Underhill [SU94]开发的涡度限制技术是对Navier-Stokes方程的一种修改，它试图保留涡度。 Fedkiw等人[FSJ01]将其引入图形中，引入了一个Δx因子，以便在极限（随着网格的细化）中，该术语消失，我们得到了真实的流体解。 基本思想是检测旋涡的位置，并添加体力以增强每个旋涡周围的旋转运动.

在这种情况下,旋涡大致是指旋涡场中的一个峰值,该位置的旋转速度比附近的所有流体都快.我们可以简单地通过标准化梯度来构造指向这些最大点的单位向量：

现在指向涡旋的旋转中心，本身指向旋转轴,因此要获得增加旋转的向量力,我们只需取一个叉积:

此处的是可以调节以控制涡度限制效果的参数.如上所述，因子使其在物理上保持一致:随着我们细化网格并且趋于零,错误的涡度数值耗散也趋于零,因此我们的解决方案也应如此.

让我们逐步完成数值实现.我们首先对从MAC网格到网格中心的速度取平均（如第2章所述）,然后使用中心导数来近似涡度(**零空间问题在这里不需要担心**).



类似地用在网格单元中心的中心差分估计梯度,以用于的定义:

当我们将其归一化为时,应该避免除以0的问题,因此

其中，是单位为的特征值,对于模拟来说不必太在意;就很好,只是为了确保正确缩放.最后,我们使用叉积在网格单元中心获取:我们可以采用适当的平均值将其应用于MAC网格上不同的速度分量.

理想情况下，我们将约束参数与预期的涡度数值耗散联系起来。 但是，这尚未完成，但与此同时，它又是仿真的另一个可调整参数。 如果设置得太高，则模拟可能会变得不稳定，从而将速度场降低到基本上只是随机的混乱； 适中的值会鼓励进行小规模的旋涡，并使流动更活跃。

找到一个单一的数字可以恢复一些我们觉得气流太无聊的涡流，但又不会破坏我们喜欢的烟圈等连贯的特征，这很棘手。 通常，我们需要一种更局限的方法，将明显的湍流仅注入某些区域。 Selle等。 [SRF05]提供了这样的工具。 他们思想的核心是在我们想要湍流的区域中播种额外的“自旋粒子”，这些粒子随流动而平移，并且其强度被添加到局部的每网格细胞涡度约束参数中。

11.3 产生湍流

最终,流体模拟器的运行分辨率受到实际限制.对于的网格,我们显然需要内存,并且隐藏常数有点大,如您所见,将时间积分,压力求解等所需的所有其他阵列相加时，就可以看到.如果我们按照建议使与成比例，并使用第5章中开发的MICCG（0）线性求解器，需要O（√n）迭代进行收敛，那么最终得出的模拟标定的总成本为O（ n4.5）。 这给获得更高的分辨率带来了严重的瓶颈.

但是，真正的湍流会在很大的长度范围内显示出特征（涡流）。 作为参考，例如，大气中的湍流范围可以从几千米到几毫米。 根本没有可行的方法直接使用能够捕获该范围（）的网格直接进行仿真。 但是，低于一定长度尺度的湍流特征往往会失去结构并变为各向同性，并易于进行统计描述：如果滤除流体的大尺度运动并放大小尺度的湍流，则任何区域看起来都非常像 任何其他地区。 这是我们的救赎恩典。 在实际模拟的规模之下，我们可以添加湍流场的过程模型来伪造其他细节。 对于湍流烟雾，我们不是跟踪网格级别的烟雾浓度场，而是跟踪并渲染通过此增强的速度场运行的数百万个标记粒子（例如，参见Rasmussen等人[RNGF03]）。

现在我们来看看两种生成所需过程速度场的方法。 关键要求是允许控制速度的频谱（即查看不同长度范围内的速度变化），并确保速度仍然没有发散。

11.3.1 傅里叶合成

产生合理的湍流速度场的一种较简单的方法是在傅立叶空间中进行.如果我们对速度场进行傅立叶变换,假设它在边长为L的立方体上是周期性的,则可以写成

在这里，我们使用作为符号来表示虚数,而不是更常见的或,因为本书使用和作为网格索引.这个傅立叶级数显然也使用了复指数而不是正弦和余弦，这意味着即使是实数值，傅立叶系数也可能是复数:这有助于简化其他一些表示法,更重要的是,与大多数快速傅立叶变换程序包的API匹配.还要注意,傅立叶系数是复数3D向量,而不仅是标量:您可以认为这实际上是的傅立叶变换,的独立傅立叶变换以及的傅立叶变换的组合形式.

实际上,我们仅使用傅里叶系数为的离散傅立叶变换.长度的选择应足够大,以使周期性平铺不太明显,但相对于模拟网格间距而言却不算太大-毕竟，我们将不能承受太大的,并且希望傅立叶网格间距（我们将在程序上添加的最小细节）比小得多.

Shinya和Fournier [SF92]以及Stam和Fiume [SF93]向图形中引入了也许是最简单的物理上合理的湍流模型，即Kolmogorov-“5/3定理”.这表明，对于充分发展的稳态湍流，在附近的所有空间频率的傅立叶模式中包含的动能应按照缩放.这意味着傅里叶系数(空间频率为)的量级应为

成立于于足够大(假定低空间频率不属于各向同性湍流状态.)实际上,我们可以认为它是从半径为的球中均匀采样的随机向量,其中是用户可调整的常量.频率阈值(低于该频率可使保持为零)大小应在之上,因此我们不添加 模拟中捕获的比例的程序细节。

速度的散度在傅立叶级数上成为简单代数运算:

因此,等效于要求每个傅里叶系数垂直于其**波向量[wave vector]**.使速度场无散度可简单地修正每个系数——在径向上减去它们的分量——一个简单的3D投影.

最后,一旦确定了傅立叶系数,就可以对u，v和w分量的每一个应用逆FFT，以获得合理速度的网格。 请注意，速度矢量是在所有组件的网格点处采样的，这不是交错的MAC网格.可以在网格点之间使用三线性插值法进行粒子对流。

为了及时对该速度场进行动画处理，最简单的技术（由Rasmussen等人提出[RNGF03]）是构造两个这样的速度场，然后在它们之间来回淡入淡出。 关键的观察结果是，尽管这种动画方法本身缺乏合理性（就此而言，该领域的周期性也是令人反感的），但这仅是在已经详细的模拟之上。 只是需要额外的细节才能破坏模拟网格点之间的平滑插值，而不是完美表现。

11.3.2 噪点

尽管傅立叶综合具有许多优点（相当有效且具有良好的理论背景），但也存在一些问题，其中主要是如何在空间中控制它。如果您希望一个区域的湍流强于另一个区域，或者要正确处理流动中某处的实心壁，那么要同时满足无散度约束就变得很困难。

另一种选择是忘记傅立叶变换，而直接从诸如Perlin噪声的构造块构造无散度的速度场。 我们通过利用向量演算恒等式来获得无散度条件。例如，矢量场的卷曲散度始终为零：

两个梯度的叉积也总是无散度的：

Kniss和Hart [KH04]和Bridson等人[BHN07]使用了这些公式中的第一个，将设为矢量值噪声函数，而DeWolf [DeW05]使用了第二个公式，将和用作标量噪声函数（另请参见von Funck等人的[vFTS06]） 几何建模中的这种身份）.

为了获得充分的湍流，可以在两个公式中添加几个八度的噪声，并且具有适当的幂律定标幅度。 例如，使用第一个公式，卷曲噪声，我们可以考虑矢量势(未完待续)